

GEOMETRIA ALGEBRAICA 2010

EJERCICIOS ADICIONALES A

Ejercicio A.1 (Estructura de VAA/K en un conjunto algebraico proyectivo.)

Sea K un cuerpo y denotemos

$$P = P^n(K) = K^{n+1} - \{0\}/K^*$$

el espacio proyectivo standard de dimension n sobre K .

a) Definir una estructura ("estructura standard") de VAA/K en P .

Sug.: Considerar las cartas $\phi_i : U_i \rightarrow K^n$ donde $U_i = \{[x] \in P/x_i \neq 0\}$, definidas por

$$\phi_i(x_0 : \cdots : x_n) = (x_j/x_i)_{j \neq i}$$

Calcular $\phi_i \phi_j^{-1}$, ver que son funciones regulares, etc. Escribirlo primero para $n = 1$ y $n = 2$.

b) Sea $A = K[x_0, \dots, x_n]$. Sea $S \subset A$ un conjunto de polinomios homogeneos y denotemos $X = V(S)$ el conjunto algebraico proyectivo definido por S . Definir una estructura de VAA/K en X .

Sug: Ver que $\phi_i(X) \subset K^n$ es un conjunto algebraico, para todo i . Mas precisamente, es el conjunto de ceros de $S^{(i)} = \{F^{(i)}, F \in S\}$ donde $F^{(i)}$ es el polinomio en n variables obtenido de F reemplazando $x_i \mapsto 1$ ("afinizacion respecto de la variable x_i ").

Ejercicio A.2 (Estructura de VAA/K en espacios vectoriales y proyectivos abstractos.)

a) Sea K un cuerpo, sea V un espacio vectorial de dimension finita. Definir una estructura ("canonica o natural o evidente") de VAA/K en V .

Sug: Elegir una base de V y definir la estructura. Demostrar que no depende de la base. O, tambien, hacerlo de modo intrinseco, ver b).

b) Definir un morfismo de anillos natural $e : S(V^*) \rightarrow O(V)$.

Aqui $S(W)$ es el algebra simetrica de un espacio vectorial W y $O(V)$ es el anillo de funciones regulares $V \rightarrow K$. Demostrar que si K es algebraicamente cerrado entonces e es un isomorfismo.

Sug.: Deducirlo de lo demostrado en clase para K^n .

c) Similarmente definir una estructura de VAA/K natural para

$$PV = V - \{0\}/K^*$$

(espacio proyectivo asociado a V).

Ejercicio A.3 (Espacios multi-proyectivos.)

Sea K un cuerpo, sean r y n_1, \dots, n_r numeros naturales. Denotemos

$$P = P^{n_1}(K) \times \dots \times P^{n_r}(K)$$

el conjunto producto cartesiano de los espacios proyectivos standard de dimensiones n_1, \dots, n_r .

Vamos a definir una estructura de VAA/ K en P , generalizando la conocida del caso $r = 1$.

Primero el caso $r = 2$. Denotemos $P = P^n(K) \times P^m(K)$.

Sea $A = K[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$. Si $F = F(x, y) \in A$, decimos que F es bi-homogeneo de bi-grado (d, e) si

$$F(sx, ty) = s^d t^e F(x, y)$$

para $s, t \in K$. Equivalentemente (si K es infinito), F es combinacion lineal de monomios de tipo $x^a y^b$ donde $\sum a_i = d$, $\sum b_j = e$. Notar que la nocion de bi-homogeneo depende de la particion elegida del conjunto de las $n + m + 2$ variables en dos grupos disjuntos x, y .

Por ejemplo, si $(d, e) = (1, 1)$ entonces $F = \sum F_{ij} x_i y_j$ (o sea, F es una forma bilineal. Como polinomio en x, y tiene grado total 2, pero tiene grado 1 en x y en y).

Para F bi-homogeneo esta bien definido el conjunto $V(F) \subset P$ de ceros de F .

$$V(F) = \{([x], [y]) \in P / F(x, y) = 0\}$$

(aunque F no define una funcion $P \rightarrow K$)

Definir "conjunto algebraico en P " o "conjunto bi-proyectivo" (conjunto de ceros de una familia de polinomios bi-homogeneos). Demostrar que intersecciones arbitrarias y uniones finitas de conjuntos algebraicos en P son idem. Tenemos entonces la topologia de Zariski en P .

Definir conjuntos cuasi-algebraicos en P , en particular abiertos principales $D(F) = P - V(F)$ para F bi-homogeneo. Verificar que los abiertos principales forman una base (y tambien una sub-base) de los abiertos. La interseccion finita de abiertos principales es abierto principal.

Definir un atlas en P (similar al atlas en el espacio proyectivo, caso $r = 1$).

Sug.: considerar cartas de la forma

$$U_{ij} = \{([x], [y]) \in P / x_i \neq 0, y_j \neq 0\} = P - V(x_i) - V(y_j) = D(x_i y_j)$$

$$\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow K^{n+m}$$

Calcular $\phi_{ij} \phi_{hk}^{-1}$ y ver que son funciones regulares, etc.

Ver que la topologia en P deducida del atlas coincide con su topologia de Zariski.

Demostrar que si $X \subset P$ es un conjunto algebraico en P entonces X tiene una estructura natural de VAA/ K .

Sug: considerar la imagen de X por las cartas del atlas de P . Determinar las ecuaciones que definen el conjunto algebraico $\phi_{ij}(X)$.

Obs.: El caso mas sencillo es $P^1 \times P^1$, una superficie algebraica, a ser utilizada mas adelante.

Caso $r = 3$. Es similar, se utilizan polinomios tri-homogeneos (en particular, formas tri-lineales).

Escribir el caso r general. Considerar polinomios r -homogeneos. Enunciar y demostrar las afirmaciones analogas. Es similar, aunque aqui es importante elegir una buena notacion.

Ejercicio A.4 (Pegado de variedades algebraicas abstractas.)

Sea I un conjunto. Para cada $i \in I$ sea X_i una VAA/K. Supongamos dados:

- para cada $(i, j) \in I \times I$ un abierto $U_{ij} \subset X_i$.
- para cada $(i, j) \in I \times I$ un isomorfismo de VAA/K $p_{ji} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$, tales que:
 - i) $U_{ii} = X_i$ y $p_{ii} = id_{X_i}$, para todo $i \in I$.
 - ii) para todo $(i, j, k) \in I \times I \times I$ vale $p_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ y $p_{kj}p_{ji} = p_{ki}$ (dibujar el triangulo conmutativo, para mayor claridad)

Sea X' la union disjunta de los X_i . Definimos la relacion de equivalencia en X' que relaciona cada $u \in U_{ij}$ con $p_{ji}(u) \in U_{ji}$. Sea X el conjunto cociente.

a) Definir en X una estructura ("natural") de VAA/K. Decimos que X es la variedad obtenida pegando las X_i segun los datos de pegado $p_{ji} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$.

b) Las aplicaciones canonicas $X_i \rightarrow X$ (inclusion en X' compuesta con proyeccion al cociente) son regulares. Enunciar y demostrar una propiedad universal de X (Es un colimite, para quienes vieron la definicion. Quizas se puede generalizar a colimites de otros diagramas?).

c) Con el mismo conjunto de indices I , sea otra coleccion de variedades Y_i , con abiertos $V_{ij} \subset Y_i$ e isomorfismos $q_{ji} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ satisfaciendo tambien las condiciones de pegado. Sea Y la variedad obtenida pegando. Supongamos que tenemos aplicaciones regulares $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ tales que $f_i(U_{ij}) \subset V_{ij}$ y tales que conmutan con los datos de pegado. Demostrar que existe una aplicacion regular unica $f : X \rightarrow Y$ tal que $f a_i = b_i f_i$, donde $a_i : X_i \rightarrow X$, $b_i : Y_i \rightarrow Y$ son las aplicaciones canonicas.

d) Dar rienda suelta a la imaginacion y encontrar ejemplos interesantes de estas construcciones.

Nota1: Vamos a ver algunos otros ejemplos y aplicaciones mas adelante, especialmente la construccion de fibrados via cociclos.

Nota2: Las mismas definiciones y construcciones se aplican en otros contextos: pegado de espacios topologicos, de variedades diferenciales, de haces, de fibrados, etc. Esto fue generalizado por Grothendieck (Teoria del descenso: FGA, SGA1).